

Die zeitliche Entwicklung der Townsend-Entladung bis zum Durchschlag

Von W. KÖHRMANN

Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforschg. **19 a**, 926—933 [1964]; eingegangen am 9. März 1964)

Für eine ebene Entladungsstrecke in Wasserstoff ($p d = 1000$ Torr cm) wird der Stromanstieg der TOWNSEND-Entladung berechnet; die Ausrechnung beginnt bei der anfänglichen (raumladungsfreien) Entwicklung und führt über das Stadium, in dem die Raumladung der positiven Ionen und der Elektronen wirksam wird, bis in den Bereich der Spannungsabsenkung an der Entladungsstrecke. Das für die Ausrechnung benutzte Modell enthält die üblichen Prozesse, wie Trägerbewegung und Stoßionisation (dargestellt durch die TOWNSENDSchen Diff.-Gln.), sowie photoelektrische Nachlieferung an der Kathode (γ_{ph} -Effekt). Wesentlich bei diesen Prozessen ist der Einfluß der Feldstärke, die nach der Poisson-Gleichung mit der resultierenden Raumladung der Ionen und Elektronen zusammenhängt. — Auf Grund der Ergebnisse der Rechnung lassen sich folgende Phasen in der Entwicklung der Entladung unterscheiden: Während des anfänglichen Raumladungsaufbaus (A) erfährt die zeitliche Entwicklung des Stromes eine Beschleunigung. Im nächsten Stadium (B) bildet sich ein Kathodenfall, der die Lieferung von Elektronen für das restliche Gebiet übernimmt. Eine weitere Stromsteigerung in diesem Gebiet wird durch eine Ionisationswelle (C) vorgenommen; die Welle läuft (mit etwa fünffacher Elektronen-Driftgeschwindigkeit) von der Anode in Richtung auf die Kathode. Im Endstadium (D) besteht die Entladung aus dem Kathodenfall und einem anschließenden Plasma, in dem keine nennenswerte Ionisation mehr stattfindet. Die beschränkte Leitfähigkeit dieses Plasmas hat, im Zusammenhang mit dem der Entladungsstrecke vorgeschalteten Widerstand, zur Folge, daß die Spannung an der Entladungsstrecke nur partiell zusammenbricht. — Dieser partielle Zusammenbruch wurde schon bei früheren experimentellen Untersuchungen beobachtet und als charakteristisch für den TOWNSEND-Aufbau herausgestellt. Somit wird das Ergebnis der Rechnung von experimenteller Seite bestätigt.

Die Weiterentwicklung der TOWNSEND-Entladung in die stromstarke Entladungsform läßt sich für stationäre Entladungen an Hand der Strom-Spannungs-Charakteristik verstehen, wobei sich ein kontinuierlicher Übergang von der TOWNSEND-Entladung zur Glimmentladung ergibt. Die stationäre Ausmessung der Strom-Spannungs-Charakteristik stößt, insbesondere bei großem $p d$, auf Schwierigkeiten, da die Entladung in hohem Grade instabil ist. Aus diesem Grunde sind Methoden vorzuziehen, bei denen sich der Übergang in die stromstarke Entladungsform als zeitliche Entwicklung vollzieht.

Experimentelle Untersuchungen dieser Art (im homogenen Feld einer Plattenfunkenstrecke) sind für kleine Stromdichten^{1, 2} in verschiedenen Gasen ausgeführt worden. Die beobachteten Stromanstiege ließen sich durch eine einfache Theorie erklären, deren wesentliche Annahme die modifizierte Gasverstärkung $\int \alpha dx$ der Elektronenlawinen im Raumladungsfeld der positiven Ionen ist; Voraussetzung

für die Anwendbarkeit dieser Theorie ist eine schwache Feldverzerrung (maximal etwa 10%), so daß die üblichen Vorstellungen über den zeitlichen Ablauf der Entladung benutzt werden können²⁻⁴. Diese Stromanstiege, die bis etwa 10^{-5} bis 10^{-4} Amp/cm² reichen, sind aber nur der Beginn einer zum Durchschlag führenden Entwicklung.

Ein wesentlich späteres Stadium der TOWNSEND-Entladung wird bei der Beobachtung des Spannungsverlaufs an der Entladungsstrecke erfaßt. Bei Untersuchungen in Luft, Wasserstoff und Stickstoff^{5, 6} zeigte sich, daß die Spannung nur teilweise zusammenbricht, auf einen Wert $(0.6 \dots 0.8) U_D$. Die zugehörige Stromdichte liegt mit etwa 10^{-1} Amp/cm² um mehr als 3 Größenordnungen höher als bei den oben erwähnten Stromanstiegen. Die Entladung füllt im Stadium des partiellen Zusammenbruchs den Querschnitt der Entladungsstrecke aus. Der Funke entsteht erst beim vollständigen Zusammenbruch der Spannung⁷. — Da unter gleichen experimentel-

¹ H. W. BANDEL, Phys. Rev. **95**, 117 [1954]. — R. KLICKOW, Z. Phys. **148**, 564 [1957]. — H. MIELKE, Z. Angew. Phys. **11**, 409 [1959]. — R. KLICKOW, Z. Phys. **161**, 353 [1961]. — H. SCHLUMBOHM, Dissertation, Hamburg 1961. — H. HÖGER, Dielectrics **1**, 94 [1963].

² J. PFAUE, Z. Angew. Phys. **16**, 15 [1963].

³ W. KÖHRMANN, Z. Angew. Phys. **11**, 414 [1959].

⁴ W. KÖHRMANN, Z. Naturforschg. **19 a**, 245 [1964].

⁵ W. KÖHRMANN, Z. Angew. Phys. **7**, 187 [1955]; Ann. Phys., Lpz. **18**, 379 [1956]. — T. MORI, Electrotechn. J., Japan **2**, 54 [1956]. — Y. MIYOSHI, Bull. Nagoya Inst. Technol. No. 8 [1956].

⁶ K. DEHNE, W. KÖHRMANN u. H. LENNÉ, Dielectrics **1**, 129 [1963].

⁷ R. F. SAXE, Brit. J. Appl. Phys. **7**, 336 [1956]. — H. THOLL, Z. Naturforschg. **19 a**, 346 [1964].



len Bedingungen der Kanalaufbau einen vollständigen Zusammenbruch der Spannung zur Folge hat, konnte das Spannungsoszillogramm als empirisches Kriterium für die Grenze zwischen TOWNSEND-Aufbau und Kanalaufbau herangezogen werden^{5, 6}.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Berechnung des zeitlichen Stromanstieges der TOWNSEND-Entladung über die bisherige Grenze von 10^{-4} Amp pro cm^2 hinaus bis in den Bereich des Spannungszusammenbruchs. Für die Berechnung wird ein eindimensionales Modell angesetzt mit gleichmäßig über die Entladungsstrecke verteilten Stromdichten. Demnach treten nur x und t als unabhängige Veränderliche auf. Weiter wird angenommen, daß nur die üblichen Prozesse, wie Stoßionisierung, Bewegung der Ladungsträger und Nachlieferung durch Photoeffekt an der Kathode, wirksam sind. Wesentlich ist der Einfluß der Feldstärke (die nach der Poisson-Gleichung mit der Ladungsverteilung zusammenhängt) auf diese Prozesse. Die Annahmen über diese Prozesse werden im Abschnitt 1 ausführlich erläutert. — Entsprechend den experimentellen Bedingungen in⁶ nehmen wir an, daß die Entladungsstrecke (mit einer Eigen-Kapazität C) über einen Vorwiderstand R mit der Spannungsquelle verbunden ist.

Die Ausrechnung wird für ein spezielles Beispiel (bezüglich Gasart, Druck, Abstand, Überspannung usw.) durchgeführt. Eine detaillierte Diskussion zeigt, daß folgende Entladungsparameter frei wählbar sind:

$\alpha_0 d$, v_+/v_- sowie der Verlauf von $\alpha/\alpha_0 = f(E/E_0)$ (wobei E_0 und α_0 sich auf den Beginn der Entladung beziehen). Einen großen Einfluß auf den Entladungsablauf scheint die Überspannung (bzw. der Wert μ_{ph}) zu haben. Jedoch hat sich bei der für kleine Stromstärken gültigen Theorie⁴ gezeigt, daß Stromanstiege mit unterschiedlichem Anfangsverlauf unter dem Raumladungseinfluß in einen einheitlichen (asymptotischen) Verlauf übergehen. Somit scheidet die Überspannung als freier Entladungsparameter aus. Von den obigen Entladungsparametern könnte nur α/α_0 wesentlich variiert werden, und zwar durch Wahl eines anderen $p d$ -Wertes. Bei Beschränkung auf $p d > 100$ Torr cm hat das hier gewählte Beispiel Allgemeingültigkeit.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit wird ebenfalls der Stromanstieg einer TOWNSEND-Entladung (Luft, $p d = 760 \cdot 1$ Torr cm) berechnet^{8, 9}, wobei eine konstant an der Entladungsstrecke anliegende Spannung angesetzt wird. Aus diesem Grunde kann diese Ausrechnung nicht ohne weiteres mit den hier gewonnenen Ergebnissen verglichen werden.

1. Grundgleichungen

Die Produktion von Elektronen und Ionen im Gasraum wird durch die TOWNSENDSchen Diff.-Gln. beschrieben (Herleitung in allg. Form siehe¹⁰):

$$\frac{\partial n_-}{\partial t} = -\frac{\partial j_-}{\partial x} + \alpha j_-, \quad j_- = v_- n_-; \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} = \frac{\partial j_+}{\partial x} + \alpha j_-, \quad j_+ = v_+ n_+. \quad (2)$$

Die zeitliche Entwicklung der Entladung wird durch den die Kathode verlassenden Elektronenstrom bestimmt [Gl. (3)]; Gl. (4) ist eine Randbedingung für den Ionenstrom.

$$j_-(0, t) = j_F(t) + \int_0^d j_-(x, t) \delta(x, t) dx \\ = j_F(t) + \gamma_{\text{ph}} \int_0^d j_-(x, t) \alpha(x, t) dx, \quad (3)$$

$$j_+(d, t) = 0. \quad (4)$$

Die Feldverhältnisse in der Entladungsstrecke ergeben sich aus der Poisson-Gleichung:

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} = n_- - n_+. \quad (5)$$

Die Entladungsstrecke (mit der Eigenkapazität C) ist über einen Widerstand R mit der Spannungsquelle U_0 verbunden (Abb. 7). Es gelten dann folgende Beziehungen:

$$\frac{1}{R} \{U_0 - U(t)\} = C \frac{dU(t)}{dt} + I(t) \quad (6)$$

$$\text{mit} \quad U(t) = \int_0^d E(x, t) dx,$$

$$I(t) = F\{J_+(t) + J_-(t)\}, \quad (7)$$

$$J_+(t) = \frac{1}{d} \int_0^d j_+(x, t) dx, \quad (8)$$

⁸ A. L. WARD, VI. Int. Conf. Ionization Phenomena in Gases, Paris 1963.

⁹ W. BÖRSCH-SUPAN u. H. OSER, J. Res. Nat. Bur. Stand. **67 B**, 41 [1963].

¹⁰ N. A. KAPZOW, Elektrische Vorgänge in Gasen und im Vakuum, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.

$$J_-(t) = \frac{1}{d} \int_0^d j_-(x, t) dx, \quad (9)$$

F = Elektrodenfläche bzw. Querschnitt der Entladung.

Die Gln. (6) bis (9) wurden bisher nur für die Bewegung von wenigen Ladungsträgern in einem praktisch homogenen Feld benutzt; eine Herleitung der Ausdrücke, die deren Allgemeingültigkeit auch für stark verzerrte Felder beweist, findet sich in ⁹.

Die Driftgeschwindigkeiten v_- und v_+ werden als lineare Funktion von E/p angesetzt. Für den Stoßionisierungskoeffizienten α werden, je nach E/p -Bereich, verschiedene analytische Ausdrücke benutzt. Bei dem Koeffizienten δ wird die gleiche Feldstärkeabhängigkeit wie bei α angenommen: $\delta = \gamma_{ph} \alpha$.

Das behandelte Beispiel hat folgende Daten:

$$\begin{aligned} \text{Wasserstoff: } p &= 500 \text{ Torr; } d = 2 \text{ cm;} \\ \gamma_{ph} &= 8,34 \cdot 10^{-4}; \quad E_0 = 1,984 \cdot 10^4 \text{ V cm}^{-1}; \\ (U_0 - U_D)/U_D &= 0,2\%; \quad \mu_{ph} = 1,111; \quad F = 100 \text{ cm}^2; \\ v_- &= 3,07 \cdot 10^5 E/p; \quad v_+ = 8,78 \cdot 10^3 E/p. \end{aligned}$$

Der Start der Entladung zur Zeit $t=0$ soll durch einen Lichtblitz mit 10^2 Anfangselektronen an der Kathode erfolgen: $j_F(t) = q \cdot \delta(t)$, $q = 10^2 q_e$. — Dieses Beispiel wurde schon im Rahmen der einfachen Theorie ⁴ behandelt.

2. Ergebnisse der Rechnung

Nach dem im Anhang 1 beschriebenen Rechenverfahren werden für eine Folge von Zeitpunkten t_v die

Feldstärke, die Stromdichte j_+ und j_- sowie die Ladungsdichten n_+ und n_- berechnet. Es lassen sich folgende Entladungsstadien unterscheiden:

- A Anfänglicher Raumladungsaufbau $\nu = 1 \dots 20$,
- B Entwicklung des Kathodenfalls $\nu = 21 \dots 30$,
- C Stromsteigerung durch die Ionisationswelle (Ionizing Space Wave) $\nu = 31 \dots 50$,
- D Plasma mit begrenzter Leitfähigkeit $\nu = 51 \dots 62$.

Eine Übersicht über diese Zeitintervalle findet man in Abb. 1; dort sind die Stromanteile $J_+(t)$ und $J_-(t)$ sowie der Gesamtstrom $J_+(t) + J_-(t)$ aufgezeichnet. — Im folgenden werden wir die einzelnen Stadien näher betrachten:

Anfänglicher Raumladungsaufbau (A)

Hier sind die Stromdichten der Elektronen j_- und der Ionen j_+ von etwa gleicher Größenordnung (Abb. 2). Als Raumladung überwiegt die der positiven Ionen n_+ ; die Ionen verweilen wegen ihrer geringeren Driftgeschwindigkeit länger in der Entladungsstrecke. Auf Grund der anfänglichen Struktur der positiven Raumladung, mit einem Maximum vor der Anode (Abb. 3), wird die Feldstärke vor der Anode abgesenkt, während sie an der Kathode erhöht wird. Über einen größeren Zeitbereich bleibt die Struktur der positiven Raumladung erhalten, obwohl ihre Größe um etwa 2 Zehnerpotenzen wächst ². Dies wird verständlich durch die rasche Stromsteigerung (wobei die Ionenabwanderung vernachlässigbar wird) und insbesondere durch das veränderte elektrische Feld, in dem sich der Erzeugungsbereich

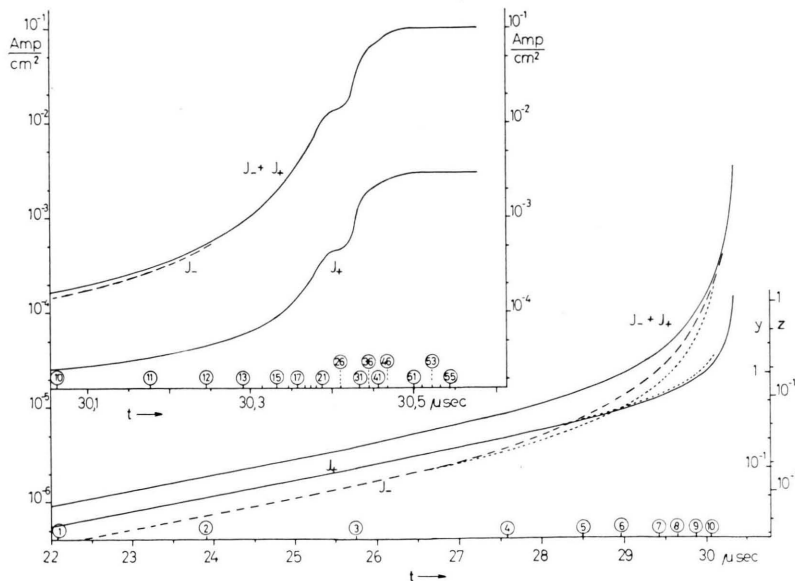


Abb. 1. Zeitlicher Verlauf der Stromanteile J_- und J_+ und des Gesamtstromes $J_- + J_+$. Die Zeitpunkte t_v sind durch Kreise gekennzeichnet. Im unteren Teil der Abb. ist (punktiert) der nach ⁴ berechnete Verlauf eingezeichnet; die Skalen an der rechten Seite stellen die Normierungen $y = K_+ J_+$ und $z = K_- J_-$ dar. Der mit $t=0$ beginnende Stromverlauf ist in ⁴, Abb. 5, dargestellt.

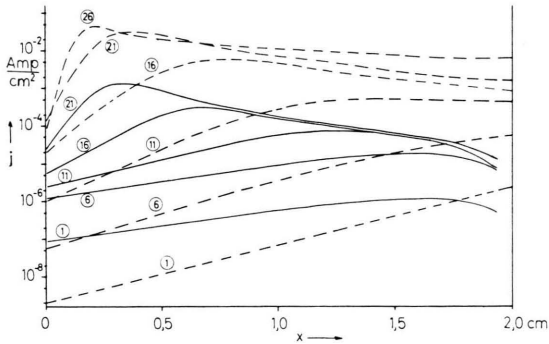
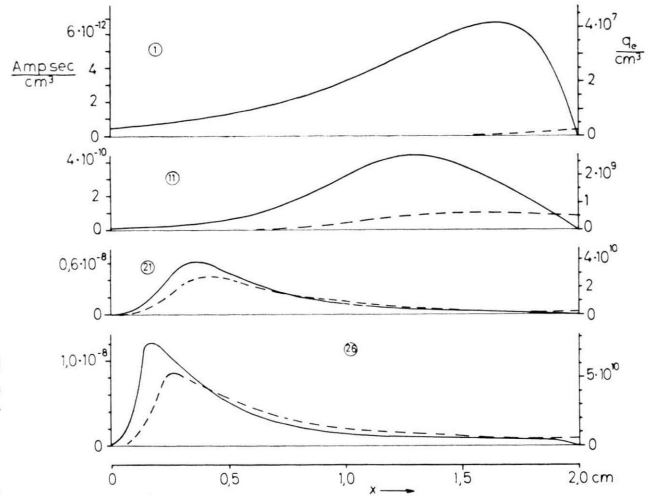


Abb. 2. Stromdichten $j_+(x)$ (—) und $j_-(x)$ (---) für verschiedene Zeitpunkte t_v ; die Werte von ν sind, auch in den folgenden Abbildungen, durch Kreise gekennzeichnet.

Abb. 3. Raumladungsdichten $n_+(x)$ (—) und $n_-(x)$ (---) für verschiedene Zeitpunkte t_v .



der Ionen in Richtung auf die Kathode verschiebt; auf diese Weise entsteht gerade die Ionenverteilung, die sich im raumladungsfreien Fall durch das Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Abwanderung einstellt.

Die zeitliche Entwicklung erfährt im A-Stadium eine erhebliche Beschleunigung; gegenüber dem raumladungsfreien Anstieg (der durch $\mu_{ph} = 1,111$ bestimmt ist) wächst die Zeitkonstante um etwa einen Faktor 20 (Abb. 1).

Entwicklung des Kathodenfalls (B)

Gegen Ende des A-Stadiums konzentriert sich vor der Kathode ein Gebiet hoher Feldstärke (Abb. 4). Weil in diesem Gebiet gleichzeitig ein großer Elektronenstrom fließt, ist hier die Ionisierungsausbeute αj_- (d. h. die Zahl der pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugten Ionen bzw. Elektronen) entsprechend hoch. Im übrigen Gebiet findet jetzt keine nennenswerte Bildung von Ionen und Elektronen statt.

Insbesondere wird im Gebiet vor der Kathode der Hauptanteil der Photonen erzeugt, die an der Kathode Nachlieferungselektronen auslösen. In Anlehnung an die Vorgänge bei der Glimmentladung wollen wir von einem Kathodenfall¹¹ sprechen.

Während des Stadiums B konzentriert sich der Kathodenfall auf ein schmales Gebiet (Abb. 4).

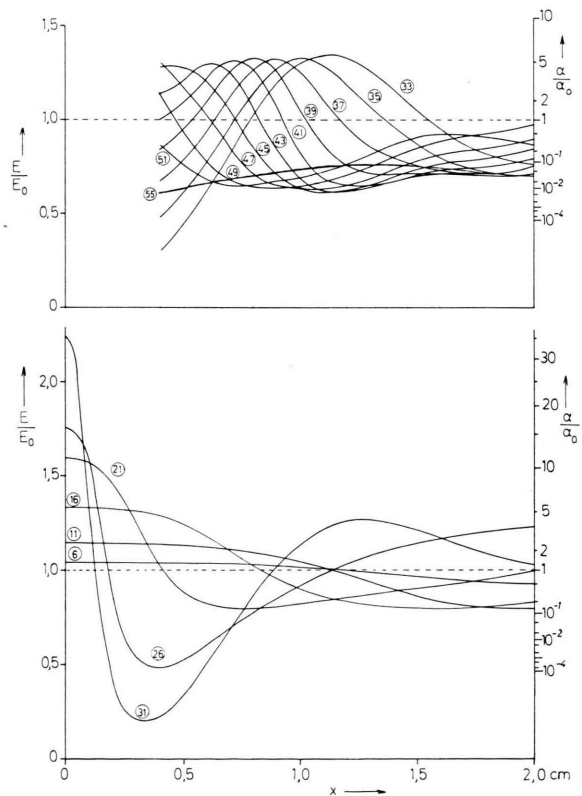


Abb. 4. Verlauf der Feldstärke $E(x)$ und des Koeffizienten $\alpha(x)$ für verschiedene Zeitpunkte t_v .

¹¹ Gegenüber der Glimmentladung bestehen folgende Unterschiede: a) Als Nachlieferungsmechanismus wirkt γ_{ph} -Effekt; Ionen, die γ_i -Effekt machen könnten, erreichen erst zu einem späteren Zeitpunkt die Kathode. b) Die hier diskutierte Stromdichte liegt weit unterhalb der Stromdichte

eines normalen Kathodenfalls. Somit arbeitet der hier definierte Kathodenfall unökonomisch und erfordert einen wesentlich höheren Spannungsabfall als der einer normalen Glimmentladung.

Gleichzeitig macht sich der aus dem Kathodenfall austretende Elektronenstrom bemerkbar. Insbesondere an der anodenseitigen Grenze des Kathodenfalls entsteht ein Überschuß an negativer Raumladung. Die damit verbundene Absenkung der Feldstärke begrenzt den Ausfluß von Elektronen aus dem Kathodenfall.

Die detaillierte Berechnung des Kathodenfallgebietes ergibt einen hohen Rechenaufwand, da eine feinere x -Einteilung als im übrigen Gebiet erforderlich ist. In den weiteren Betrachtungen ($v \geq 34$) werden wir das Gebiet des Kathodenfalls ($x \leq x_K = \frac{4}{25}d$) ausklammern; wir machen dann lediglich von der Eigenschaft des Kathodenfalls Gebrauch, für ein ausreichendes Angebot von Elektronen zu sorgen. Für den Spannungsbedarf des Kathodenfalls setzen wir:

$$\int_0^{x_K} E \, dx = 0,15 U_0.$$

Ionisationswelle (C)

Nach Ausbildung des Kathodenfalls fließt ein intensiver Elektronenstrom in die übrige Entladungsstrecke und führt (durch Kompensation der positiven Raumladung) eine Änderung der Feldverhältnisse in der Entladungsstrecke herbei. Eine nennenswerte Ionisationsausbeute αj_- entsteht zuerst an der Anode, weil hier einerseits die Feldstärke am größten ist und andererseits der Elektronenstrom ein Maximum hat.

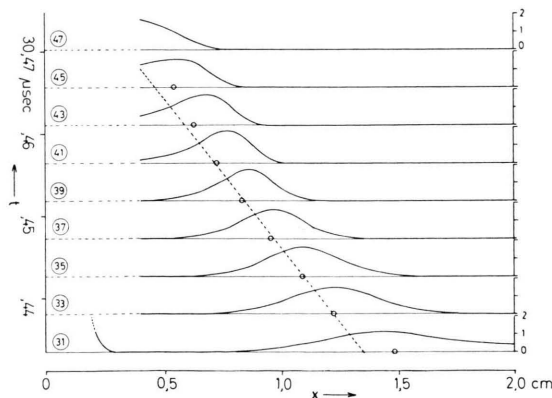


Abb. 5. Ionisationswelle. Für verschiedene Zeitpunkte t_v ist αj_- (in Amp cm^{-3}) aufgetragen. Die Kreise auf den Abszissen markieren den Schwerpunkt der jeweiligen Kurve. Gestrichelte Linie: $v = 2,8 \cdot 10^7 \text{ cm sec}^{-1}$.

Es ist nun interessant, daß sich dieser Ionisationsvorgang als Welle in Richtung auf die Kathode fortpflanzt (Abb. 5). Die Geschwindigkeit dieser Welle liegt mit $2,8 \cdot 10^7 \text{ cm/sec}$ fünfmal höher als die Driftgeschwindigkeit der Elektronen. Nach Durchlaufen der Welle hat sich die Elektronen- bzw. Ionendichte um einen Faktor 4 erhöht.

Die Ionisationswelle stellt einen Mechanismus dar, der eine rasche Stromsteigerung in der Plasmasäule herbeiführt. Eine wesentliche Voraussetzung für das Auftreten der Ionisationswelle ist das Einfließen einer ausreichenden Zahl von Elektronen in die kathodenseitige Front der Welle; unter unseren Bedingungen werden diese Elektronen im Kathodenfall erzeugt. Der Mechanismus der Ionisationswelle, insbesondere das Mitlaufen des Feldstärke-Maximums, läßt sich an Hand der Abb. 6 verstehen; dort sind für zwei aufeinanderfolgende Zeitpunkte t_{37} und t_{39} die einzelnen Funktionen dargestellt.

Für die zeitliche Änderung von $n_-(x)$ und $n_+(x)$ sind 2 Vorgänge verantwortlich, und zwar 1. die Erzeugung von Ionen und Elektronen durch Stoßionisation und 2. die Bewegung der Elektronen (die Ionenbewegung darf hier vernachlässigt werden). Eine Änderung der resultierenden Raumladung kommt ausschließlich durch die Elektronenbewegung zustande, da gleichviel Elektronen und Ionen erzeugt werden. Dies sieht man unmittelbar, indem man aus den TOWNSENDSchen Diff.-Gln. (1) und (2) bildet:

$$\frac{\partial (n_- - n_+)}{\partial t} = - \frac{\partial j_-}{\partial x}.$$

Die Abb. 6 zeigt den Verlauf von $n_-(x)$ und $n_+(x)$. Für $t = t_{39}$ ist der Verlauf von $n_-(x)$ gestrichelt aufgezeichnet, der sich nur bei Berücksichtigung der Ionisation ergeben würde. Zieht man dann zusätzlich die Elektronenwanderung in Betracht, so ergibt sich die endgültige (ausgezogene) Kurve. Im oberen Teil der Abb. 6 ist die resultierende Raumladung $n_-(x) - n_+(x)$ dargestellt; man sieht hier deutlich die Verschiebung in Richtung auf die Kathode, wodurch dann (auf Grund der Poisson-Gleichung) das Mitwandern des Feldstärke-Maximums hervorgerufen wird¹².

Gleichzeitig mit dem Durchlaufen der Ionisationswelle steigert sich der Gesamtstrom (überwiegend

¹² Vermutlich handelt es sich bei der hier beschriebenen Ionisationswelle um den gleichen Vorgang, der an anderer Stelle (R. G. WESTBERG, Phys. Rev. **114**, 1 [1959]) als

stromsteigernder Mechanismus ("return arc plasma") beschrieben wurde.

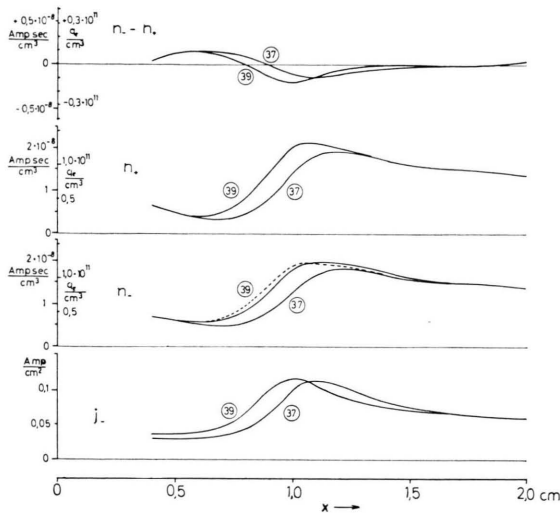


Abb. 6. Zur Entstehung der Ionisationswelle.

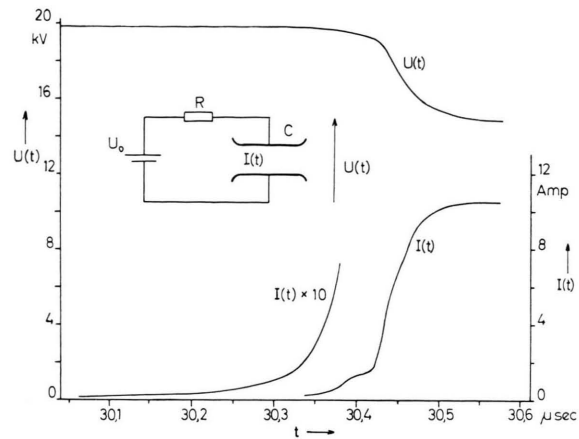
Elektronenstrom) in der Entladungsstrecke. Dies ergibt auf Grund der äußeren Schaltung des Entladungskreises ein Absinken der Spannung (Abb. 7). Im übrigen deutet sich für $\nu > 45$ eine 2. Ionisationswelle an, die an der Anode startet. Die Amplitude dieser 2. Welle ist wesentlich kleiner als die der 1. Welle, da die Spannung an der Entladungsstrecke inzwischen sehr weit abgesunken ist. Für die weiteren Vorgänge bleibt diese 2. Welle ohne Bedeutung.

Plasma mit beschränkter Leitfähigkeit (D)

Nachdem die Ionisationswelle den Kathodenfall erreicht hat, ist in dem Entladungsgebiet zwischen x_K und d ein Plasma entstanden, das bezüglich Ionen- und Elektronendichte keine nennenswerte Struktur hat. Die Feldstärke ist für $\nu = 55$ näherungsweise konstant über x (Abb. 4). Gleichzeitig ist die Stromsteigerung [bzw. die Absenkung der Spannung $U(t)$] zum Stillstand gekommen; die Feldstärke hat einen Wert erreicht, bei dem nur noch geringe Ionisation stattfindet.

Die Vorgänge in der näherungsweise stationär gewordenen Entladung werden durch die Größenordnung der positiven Raumladung n_+ bestimmt. Die nach der Poisson-Gleichung verursachten Feldstärke-Änderungen führen dazu, daß sich die (als Elektronen schnell bewegliche) negative Raumladung der positiven Raumladung anpaßt: $n_- \approx n_+$. Der Stromtransport wird hauptsächlich von den Elektronen getragen: $j_- = v_- n_-$, während der Ionenanteil

j_+ des Stromes im Verhältnis der Beweglichkeiten geringer ist. — Auf Grund der Unveränderlichkeit von n_+ hat das Plasma, das den Bereich zwischen Kathodenfall und Anode ausfüllt, eine beschränkte Leitfähigkeit.

Abb. 7. Zeitlicher Verlauf des Stromes $I(t)$ und der Spannung $U(t)$ an der Entladungsstrecke. Werte für das Ersatzschaltbild: $R = 485 \Omega$, $C = 28 \text{ pF}$.

In dem weiteren Entladungsablauf nach $\nu > 55$ sind zwei Vorgänge von Bedeutung: 1. die Entstehung eines Anodenfalls und 2. die restliche Ionisierung, durch die eine langsame Steigerung von n_+ (und entsprechend eine Steigerung der Leitfähigkeit) erzielt wird. Der Anodenfall ist etwa bei $\nu = 57$ ($t = 31 \mu\text{sec}$) voll ausgebildet; er übernimmt dann die laufende Nachlieferung der abwandernden Ionen.

3. Diskussion

Vergleich mit dem Experiment

Wir können das Ergebnis unserer Berechnung an Hand eines gemessenen Spannungsverlaufs $U(t)$ nachprüfen. Zur Verfügung steht ein Oszillogramm, das bei $\Delta U/U_D = 2,5\%$ aufgenommen wurde. Die unterschiedliche Überspannung ist für den weiteren Ablauf unerheblich, wie in der Einleitung ausführlich dargelegt wurde. — Der Vergleich in Abb. 8 zeigt, daß die Rechnung den gemessenen Verlauf wiedergibt; im Bereich $t > 30,5 \mu\text{sec}$ (Stadium D) zeigt sich eine näherungsweise konstante Differenz zwischen Messung und Rechnung. Diese Differenz ist vermutlich darauf zurückzuführen, daß der Kathodenfall einen höheren Spannungsbedarf als $0,15 U_0$ hat.

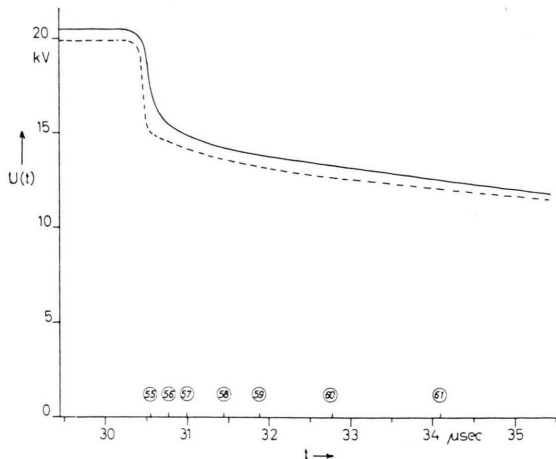


Abb. 8. Spannungsverlauf an der Entladungsstrecke. — Messung, — — — berechneter Verlauf. Die Zeitachse bezieht sich auf den berechneten Verlauf.

Die vorstehende Ausrechnung hat gezeigt, daß die Weiterentwicklung der TOWNSEND-Entladung unter den hier angenommenen Bedingungen zwangsläufig zu einem partiellen Zusammenbruch der Spannung führt. Eine frühere Erklärung¹³ hatte den partiellen Zusammenbruch in das Stadium des Funkenkanals gelegt („Querinstabilität“); durch Abschätzung der in der Entladung umgesetzten Energie ergibt sich jedoch, daß die Entladung in dieser Phase nicht auf einen engen Kanal beschränkt sein kann⁶. — Unter bestimmten Umständen entsteht auch beim Kanalaufbau ein partieller Zusammenbruch, nämlich dann, wenn die in der Entladungsstrecke C gespeicherte Energie nicht für die Ausbildung eines hochleitenden Funkenkanals ausreicht. Erst die über R nachfließende Energie gibt dann den vollständigen Zusammenbruch. Dieses Verhalten läßt sich insbesondere bei kleinem Druck beobachten¹⁴.

Übergang zur normalen Glimmentladung und zum Lichtbogen

In Analogie zu den Vorgängen bei stationären Entladungen sollte man auch hier erwarten, daß die TOWNSEND-Entladung bei der Zündung in eine Glimmentladung übergeht. Die Entladung im Stadium D hat mit Kathodenfall, Säulenplasma und Anodenfall die Struktur einer Glimmentladung, un-

terscheidet sich aber durch die geringere Stromdichte und den höheren Spannungsbedarf von einer normalen Glimmentladung. Die Daten der normalen Glimmentladung für Wasserstoff, $p d = 500 \cdot 2$ Torr cm, sind¹⁵: Stromdichte: 16 Amp/cm²; Brennspannung: 2,5 kV.

Wie die experimentellen Untersuchungen gezeigt haben, kann die Entladung aus dem Stadium D in einen Lichtbogen (Funken) übergehen. Dieser Vorgang entspricht dem Lichtbogen-Übergang bei stationären Entladungen.

Die vorstehenden Betrachtungen beziehen sich auf Wasserstoff und Stickstoff. In Luft sorgt ein noch nicht geklärter Mechanismus dafür, daß die Entladung nach relativ kurzer Zeit aus dem Stadium D in den Lichtbogen übergeht; dies ergibt das typische stufenförmige Oszillogramm^{5, 6}. Die Zeitspanne bis zum Zusammenbruch der Spannung ist bei hohen Drucken so kurz, daß der Nachweis der Stufe u. U. Schwierigkeiten bereitet.

Anhang 1: Zur numerischen Berechnung

Lösungsansätze

Für den allgemeinen Fall, daß die Feldstärke E und die von ihr abhängigen Koeffizienten α , v_- und v_+ beliebige Funktionen des Ortes x und der Zeit t sind, gelten folgende Lösungsansätze:

$$j_-(x, t) = j_-(\xi, \vartheta_-(\xi)) \exp S(\xi) \left| \frac{\partial \vartheta_-(\xi)}{\partial t} \right|, \quad (1.1)$$

$$j_+(x, t) = j_+(\xi, \vartheta_+(\xi)) \left| \frac{\partial \vartheta_+(\xi)}{\partial t} \right| \quad (1.2)$$

$$+ \int_x^\xi \alpha(\xi', \vartheta_+(\xi')) j_-(\xi', \vartheta_+(\xi')) \left| \frac{\partial \vartheta_+(\xi')}{\partial t} \right| d\xi'.$$

Die Hilfsfunktionen $\vartheta = \vartheta_-(\xi)$ und $\vartheta = \vartheta_+(\xi)$ (bzw. die Umkehrfunktionen $\xi = \xi_-(\vartheta)$ und $\xi = \xi_+(\vartheta)$) beschreiben die Bahn eines Elektrons bzw. eines Ions, die jeweils zur Zeit t den Ort x erreichen:

$$\frac{d\xi_\pm}{d\vartheta} = \mp v_\pm(\xi_\pm, \vartheta) \quad \text{mit} \quad \xi_\pm|_{\vartheta=t} = x. \quad (1.3)$$

Als weitere Hilfsfunktion wird $S(\xi)$ (Gasverstärkung längs der Elektronenbahn von ξ bis x) definiert:

$$S(\xi) = \int_\xi^x \alpha(\xi', \vartheta_-(\xi')) d\xi'. \quad (1.4)$$

Bezüglich der Koordinaten x und t gelten für diese

¹³ W. ROGOWSKI, Z. Phys. **100**, 1 [1936].

¹⁴ B. GÄNGER, Arch. Elektrotechn. **39**, 508 [1949]; Der elektrische Durchschlag von Gasen, Springer-Verlag, Berlin 1953.

¹⁵ A. V. ENGEL u. M. STEENBECK, Elektrische Gasentladungen, Bd. 2, Springer-Verlag, Berlin 1934.

Hilfsfunktionen folgende Relationen:

$$\frac{\partial \theta_{\pm}}{\partial t} = \pm v_{\pm}(x, t) \frac{\partial \theta_{\pm}}{\partial x}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = v_{\pm}(x, t) \left\{ \alpha(x, t) - \frac{\partial S}{\partial x} \right\}. \quad (1.6)$$

Unter Zuhilfenahme dieser Relationen läßt sich zeigen, daß die obigen Ansätze (1.1) und (1.2) die TOWNSENDschen Diff.-Gln. (1) und (2) befriedigen. — Bis auf die Faktoren $\partial \theta_{\pm} / \partial t$, $\partial \theta_{\pm} / \partial x$ entsprechen die Ansätze (1.1) und (1.2) den für stationäre Entladungen gültigen Ausdrücken¹⁶ bzw. den für den Spezialfall konstanter Driftgeschwindigkeit schon hergeleiteten Formeln^{3, 4}. Die angehängten Faktoren $\partial \theta_{\pm} / \partial t$ usw. sind erforderlich, um die durch die zeitliche Änderung der Elektronen- bzw. Ionen-Laufzeit verursachte Stromdichte-Änderung zu berücksichtigen.

Prinzip des Rechenverfahrens

Die Funktionswerte $n_{+}(x, t)$, $n_{-}(x, t)$ sowie die Feldstärke $E(x, t)$ und die von ihr abhängigen Koeffizienten α , v_{+} , v_{-} werden für diskrete Gitterpunkte x_i , t_r berechnet:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x, \quad t_{r+1} - t_r = \Delta t.$$

Es wird folgendes Prinzip angewandt: Zum Zeitpunkt t_r seien $n_{+}(x, t_r)$ und $n_{-}(x, t_r)$ bekannt; im ersten Teil eines Rechenschrittes wird daraus mittels der Gl. (5) [unter Zuhilfenahme der Gl. (6)] die Feldstärke $E(x, t_r)$ berechnet. Der Wert $E(x, t_r)$ soll dann für das folgende Zeitintervall gelten:

$$E(x, t) = E(x, t_r), \quad t_r \leq t < t_{r+1}.$$

Mit den von $E(x, t)$ abhängigen Koeffizienten v_{+} , v_{-} und α werden dann im 2. Teil eines Rechenschrittes die Funktionen $n_{+}(x, t_{r+1})$ und $n_{-}(x, t_{r+1})$ berechnet.

Kriterium für die Wahl von Δt und Δx

Grundsätzlich wird gefordert, daß die Änderung des Koeffizienten α (der die größte Feldstärke-Abhängigkeit besitzt) zwischen benachbarten Gitterpunkten gering ist. Bei der Einteilung der x -Achse reicht im allgemeinen $\Delta x = d/25$ aus; lediglich das Gebiet des Kathodenfalls in der Phase B erfordert eine feinere Ein-

teilung: $\Delta x = d/125$. Zu Beginn der Rechnung darf Δt relativ groß gewählt werden; dann können die Lösungsansätze (1.1) und (1.2) zur Ausrechnung benutzt werden (Verfahren I). Allerdings müssen (1.1) und (1.2) auf n_{-} , n_{+} umgeschrieben werden, da j_{-} , j_{+} (ebenso wie E) an den Stellen t_r unstetig sind. In der Phase C sind kleinere Δt erforderlich; es ist dann günstiger, die Gln. (1) und (2) für eine direkte Ausrechnung zu benutzen (Verfahren II). Voraussetzung für das Verfahren II ist $\Delta t \leq v^{-1} \Delta x$. — Die Rechnung beginnt bei $t_1 = 22,07 \mu\text{sec}$. Die Ionen- und Elektronenverteilungen zu diesem Zeitpunkt lassen sich mit den Formeln für den raumladungsfreien Fall berechnen¹⁷.

Anhang 2: Prüfung der analytischen Lösung

In einigen vorangehenden Arbeiten²⁻⁴ wurde eine analytische Methode (A) zur Berechnung des Stromanstieges unter Raumladungseinfluß entwickelt; das Besondere an dieser Methode ist die Elimination der Variablen x durch geeignete Annahmen über Feldstärkeverlauf usw. Das zur Berechnung benutzte Gleichungssystem enthält dann nur noch die Gesamtströme J_{+} und J_{-} als Funktion der unabhängigen Variablen t .

Mit der hier entwickelten numerischen Ausrechnung (N) kann das Verfahren A überprüft werden; insbesondere kann dessen Gültigkeitsbereich festgestellt werden. Diese Überprüfung wird in Abb. 1 durch Vergleich des nach A berechneten Stromanstieges (gestrichelt eingezeichnet) mit dem exakt berechneten Stromverlauf (N) ausgeführt. Bei dem Ionenstrom J_{+} ergeben sich in dem betrachteten Strombereich nur geringe Unterschiede zwischen den nach beiden Verfahren berechneten Stromverläufen. Beim Elektronenstrom J_{-} zeigen sich merkliche Abweichungen, und zwar steigt J_{-}^N stärker an als J_{-}^A . Die Ursache für das Zurückbleiben von J_{-}^A liegt in einer ungünstigen Näherung, die bei der Herleitung von Gl. (2) in⁴ gemacht wurde. Anschaulich gesprochen: Bei A wird der mittlere Ort der Elektronenerzeugung zeitlich konstant bei $x = d - \alpha_0^{-1}$ gelassen, während er auf Grund der veränderten Feldverhältnisse in Richtung auf die Kathode wandert¹⁸. — Auf der Basis der in Abb. 1 dargestellten Abweichung J_{-}^N / J_{-}^A wird in⁴ eine Abschätzung des Gültigkeitsbereiches für das Verfahren A durchgeführt.

¹⁶ W. O. SCHUMANN, Z. Techn. Phys. **11**, 131, 194 [1930]. — R. W. CROWE, J. K. BRAGG u. V. G. THOMAS, Phys. Rev. **96**, 10 [1954]. — A. L. WARD, Phys. Rev. **112**, 1852 [1958].

¹⁷ P. L. AUER, Phys. Rev. **111**, 671 [1958].

¹⁸ In² wird das Wegwandern des Erzeugungsortes der Elektronen durch Anbringen der Korrektur Q_{-}/Q_{ges} berücksichtigt, wodurch eine zusätzliche Erweiterung des Gültigkeitsbereiches erzielt wird.